то координаты эквидистанты определяются с использованием зависимостей для вышеуказанных случаев или входящие в эти зависимости производные могут быть найдены известными методами дифференцирования табличных функций или дифференцированием интерполяционных кривых. При графическом задании профиль обрабатываемой детали, как правило, описывается дугами окружностей. Порядок графического построения эквидистанты к графически заданному профилю общеизвестен и состоит в увеличении или уменьшении на требующуюся величину радиуса кривизны детали.

Список цитированных источников

1. Майборода, В.С. Основи створэння і використання порошкового магнітно-абразивного інструменту для фінішної обробки фасонних поверхонь: автореф. дис. … д-ра технич. наук: 05.03.01 / В.С. Майборода.; Киев. политех. ин-т. – Киев, 2001. – 36 с.
2. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1969. – 640 с.

УДК 330.4

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Мацулевич Е.И.
Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Климашевская И.Н., к. ф.-м. н., доцент

Все в окружающем нас мире находится в непрестанном движении: меняется с течением времени взаимное расположение планет нашей солнечной системы, температура и давление воздуха, силы, действующие в машине, токи, протекающие в электрической цепи, состояние живой клетки. Таким образом, при изучении тех или иных процессов и явлений часто возникает задача определения скорости этих процессов. Её решение приводит к понятию производной, являющемуся основным понятием дифференциального исчисления. Дифференциальное исчисление создано в XVII и XVIII вв. в трудах И. Ньютона и Г.В. Лейбница.

В природе и физике часто встречаются ситуации, когда ничего не известно о функции, зато известна ее производная, которая часто имеет самостоятельный физический смысл. Например, мгновенная скорость – первая производная координаты по времени, мгновенное значение силы тока – первая производная заряда по времени.

В физике производная находит широкое применение, в том числе и для вычисления наибольших или наименьших значений каких-либо величин. В качестве такого примера рассмотрим задачу о равновесии системы электрических зарядов.

Пусть имеется система зарядов e_k и заряд e, находящийся в точке с координатами (x, y, z) в положении равновесия. Возникает вопрос: будет ли такое равновесие устойчивым, т.е. вернется ли заряд в исходное положение, если его из него вывести.

Рассмотрим систему, состоящую из заряда e и заряда e_1, находящегося в точке с координатами (x_1, y_1, z_1). Потенциальная энергия заряда e, находящегося в поле заряда e_1, определяется выражением

$$u_1 = \frac{e_1 e}{r} = \frac{e_1 e}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}. \qquad (1)$$

Зафиксируем координаты y и z и найдем $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – вторую производную от u по x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{3e_1 e(x-x_1)^2}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{e_1 e}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

Аналогично найдем $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{3e_1 e(y-y_1)^2}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{e_1 e}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{3e_1 e(z-z_1)^2}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{e_1 e}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Складывая выражения (2), (3) и (4), легко убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{5}$$

Поскольку мы не накладывали на заряд e_1 никаких ограничений, то (5) будет справедливо для любого числа слагаемых вида $\frac{e_k e}{r}$, для любой конфигурации зарядов e_k. Следовательно, (5) выполняется для каждой точки пространства между неподвижными зарядами, в том числе и для той точки, в которой заряд e находится в равновесии. Воспользуемся принципом суперпозиции сил: результат воздействия на частицу нескольких внешних сил есть векторная сумма воздействия этих сил.

Так как в положении равновесия векторная сумма сил, действующих на заряд, равна нулю, то должна быть равна нулю и сумма проекций на каждую ось координат, т.е.

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad F_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad F_z = -\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

где F_x, F_y, F_z – проекции силы соответственно на ось X, Y и Z.

Известно, что в положении устойчивого равновесия заряд обладает минимальной потенциальной энергией, таким образом, для устойчивости равновесия должны выполняться условия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} > 0. \tag{7}$$

Но условия (7) противоречат уравнению (5), поскольку сумма трех положительных величин не может равняться нулю. Следовательно, всякая равновесная конфигурация точечных зарядов неустойчива, если на них, кроме кулоновских сил притяжения и отталкивания, ничто не действует.

Доказанное утверждение носит название теоремы Ирншоу, которая сыграла важную роль в теории строения атома до создания квантовой теории, на её основании была отвергнута модель атома по Томпсону.

Список цитированных источников

1. Зельдович, Я.Б. Высшая математика для начинающих физиков и техников / Я.Б. Зельдович, И.М. Яглом – М.: Наука, 1982. – 512 с.

2. Савельев, И. В. Курс физики: учеб.: в 3-х т. / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1989. – Т. 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – 462 с.